Expression de cosinus par radicaux

L'objectif de ce problème est d'exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ par radicaux.

Partie I

On considère l'équation $(E): z^5 - 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre (E) en exprimant ses solutions sous forme trigonométrique.

2.a Déterminer la fonction polynomiale $z \mapsto Q(z)$ telle que $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$.

2.b Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en réalisant le changement d'inconnue $Z = z + \frac{1}{z}$.

3. En déduire les expressions par radicaux de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

4. Déterminer enfin l'expression par radicaux de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Partie II

1. Soit $a, h \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $C(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh)$ et $S(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)$.

1.a On suppose $\sin\frac{h}{2} = 0$.
Calculer $C(a,h)$ et $S(a,h)$ en fonction de a et de n.

1.b On suppose $\sin\frac{h}{2} \neq 0$.
Démontrer les formules :
$C(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \cdot \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$ et $S(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \cdot \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$.
On pourra pour cela évaluer $C(a,h) + i.S(a,h)$.

2. Dans cette question et dans les suivantes, θ désigne le réel $\pi/17$.
On pose $x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta$ et $x_2 = \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta$.

2.a Montrer que $x_1 > 0$.

2.b Calculer $x_1 + x_2$ à l'aide de la question 1.
On trouvera un rationnel fort simple.

2.c Calculer le produit $x_1.x_2$. Pour cela on développera le produit des deux sommes x_1 et x_2, puis on linéarisera les expressions du type $\cos a \cos b$ avant d'observer une relation entre $x_1.x_2$ et $x_1 + x_2$.

2.d Déduire des résultats qui précèdent, les expressions de x_1 et x_2 par radicaux.

3. On pose $y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta$, $y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta$, $y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta$ et $y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta$.

3.a Calculer les produits $y_1.y_2$ et $y_3.y_4$.

3.b En déduire les expressions de y_1, y_2, y_3, y_4 par radicaux, éventuellement superposés.

4. Calculer $\cos\theta.\cos 13\theta$ et décrire une méthode permettant d'exprimer $\cos\theta$ à l'aide de radicaux carrés.

Après résolution (non demandée) on obtient :

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}\right)$$